

Problem Set 8: 集合的基数

(提交截止时间: 3 月 25 日 10:00)

Problem 1

写出下列各集合的基数:

- (1) $A = \{x, y, z\}$;
- (2) $B = \{x | x = n^2, n \in \mathbb{N}\}$;
- (3) $C = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\}$;
- (4) 平面上所有的圆心在 x 轴上的单位圆的集合;
- (5) 全体复数的集合.

Problem 2

设集合 A, B, C, D 满足 $|A| = |C|, |B| = |D|$, 求证 $|A \times B| = |C \times D|$.

Problem 3

设 A, B 为可列集 (包括有穷集和无穷可列集两种情况), 证明:

- (1) $A \cup B$ 是可列集;
- (2) $A \times B$ 是可列集.

Problem 4

确定下列各集合是否是有限集、可列无限集的或不可列集. 对那些可列无限集合, 尝试给出自然数集与该集合之间的一一对应.

- (a) 大于 10 的整数集合;

- (b) 奇负整数集合;
- (c) 绝对值小于 1 000 000 的整数集合;
- (d) 0 和 2 之间的实数集合;
- (e) 集合 $A \times \mathbb{Z}^+$, 其中 $A = \{2, 3\}$;
- (f) 10 的整数倍的数的集合.

Problem 5

试给出两个不可列集合 A 和 B 的特例, 使得 $A - B$ 为:

- (a) 有限集;
- (b) 可列无限集;
- (c) 不可列集.

Problem 6

给出两个不可列集合 A 和 B 的特例, 使得 $A \cap B$ 为:

- (a) 有限集;
- (b) 可列无限集;
- (c) 不可列集.

Problem 7

假设 A 是可列集, 试证明: 若存在一个从 A 到 B 的满射函数 f , 则 B 也是可列的.
(注: “可列集合” 包括可列无限集和有穷集合两种情况, 下同.)

Problem 8

设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}^A$, 由定义证明 $\mathcal{P}(A) \approx \{0, 1\}^A$. 这里 $\mathcal{P}(A)$ 指 A 的幂集.

Problem 9

已知 B 和 $A - B$ 均为可列集, 证明 A 必为可列集.

Problem 10

试证明：可数个可列集的并集亦为可列集.

Problem 11

设集合 A, B, C 满足 $A \cap B = A \cap C = \emptyset$ 且 $B \approx C$, 试证明: $A \cup B \approx A \cup C$.

Problem 12

令 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 为所有仅由数字 1, 2 或 3 构成的无限长的序列的集合, 试证明该集合非可列集.

Problem 13

试利用 Cantor-Bernstein-Schröder (三明治) 引理证明: $2^{\mathbb{N}} \approx [0, 1)$. (提示: 将自然数 2 写为集合 $\{0, 1\}$ 的形式, 考虑用二进制对实数进行编码)